

第一题

试给出一种把一个立方体分成 54 个小立方体的方法。

第二题

假设 S 是平面上的某个点集。如果对于 S 中的任意两点 A 、 B ，我们都能在 S 中找到一个点 C 满足 $AC=BC$ ，我们就说这个点集 S 是平衡的。如果对于 S 中的任意三点 A 、 B 、 C ，我们都无法在 S 中找到一个点 P 满足 $PA=PB=PC$ ，我们就说这个点集 S 是无中心的。证明：

- 1、对于所有大于等于 3 的正整数 n ，都存在一个由 n 个点构成的平衡点集。
- 2、对于哪些大于等于 3 的正整数 n ，存在由 n 个点构成的平衡的但无中心的点集？

第三题

证明或推翻，四边形的三条最长边之和始终大于两条对角线的长度之和。

第四题

是否对于所有的正整数 n ，都能找到两枚合适的硬币，使得借助它们便能在有限步之内概率均等地产生一个 1 到 n 之间的整数？

第五题

小明和狮子同被关在一个半径为 10 米的竞技场里，狮子位于竞技场的圆心处，小明则在距离圆心 1 米的地方。两者的最大运动速度都是每秒 1 米。狮子有没有什么必

胜策略，使得不管小明怎么跑，它总能在有限的时间里抓住小明？

第六题

将 m 个球放进 n 个箱子中，已知 $m>n$ ，试在以下 8 种条件下讨论可能的不同放法。

- (1) 球相异，盒子相异，可以有空盒子；
- (2) 球相异，盒子相异，不能有空盒子；
- (3) 球相异，盒子相同，可以有空盒子；
- (4) 球相异，盒子相同，不能有空盒子；
- (5) 球相同，盒子相异，可以有空盒子；
- (6) 球相同，盒子相异，不能有空盒子；
- (7) 球相同，盒子相同，可以有空盒子；
- (8) 球相同，盒子相同，不能有空盒子；

第七题

A、B 两人在主持人 C 的带领下玩一个游戏。C 向两人宣布游戏规则：“一会儿我会随机产生两个不同的形如 $n-1/2^k-1/2^{k+r}$ 的数，其中 n 、 k 是正整数， r 是非负整数。然后，我会把这两个数分别交给你们。你们每个人都只知道自己手中的数是多少，但不知道对方手中的数是多少。你们需要猜测，谁手中的数更大一些。”这里，我们假设所有人的逻辑推理能力都是无限强的，并且这一点本身也成为了共识。C 按照规则随机产生了两个数，把它们交给了 A 和 B，然后问他们是否知道谁手中的数更大。于是有了这样的一段对话。

A：我不知道。

B：我也不知道。

A: 我还是不知道。

B: 我也还是不知道。

C: 这样下去是没有用的! 可以告诉你们, 不管你们像这样来来回回说多少轮, 你们仍然都没法知道, 谁手中的数更大一些。

A: 哇, 这个信息量好像有点儿大! 不过, 即使知道了这一点, 我还是不知道谁手中的数更大。

B: 我也还是不知道。

A: 我继续不知道。

B: 我也继续不知道。

C: 还是套用刚才的话, 不管你们像这样继续说多少轮, 你们仍然没法知道谁手中的数更大。

A: 哦……不过, 我还是不知道谁手中的数更大。

B: 而且我也还是不知道。我们究竟什么时候才能知道呢?

C: 事实上啊, 如果我们三个就像这样继续重复刚才的一切——你们俩互相说一堆不知道, 我告诉你们这样永远没用, 然后你们继续互说不知道, 我继续说这不管用——那么不管这一切重复多少次, 你们仍然不知道谁手中的数更大!

A: 哇, 这次的信息量就真的大了。只可惜, 我还是不知道谁的数更大一些。

B: 我也还是不知道。

A: 是吗? 好, 那我现在终于知道谁的数更大了。

B: 这样的话, 那我也知道了。而且, 我还知道我们俩手中的数具体是多少了。

A: 那我也知道了。

请问他们手中的数分别是多少?